INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES
STATISTICIENS ÉCONOMISTES
A L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1982. — Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

DÉFINITIONS

a. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de la base canonique $\{e_1 \dots e_n\}$, où le i^e vecteur e_i a sa coordonnée d'indice i égale à 1 et ses autres coordonnées nulles.

b. Dans cet espace, on note $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ la norme euclidienne du vecteur x, de coordonnées $x_1 \dots x_n$ par rapport à cette base.

c. Une partie D de $\mathbb{R}^n$ est convexe, si :

$$\forall x, y \in D, \quad \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1 - \lambda) y \in D$$

d. Une application f d'un convexe D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est convexe, si :

$$\forall x, y \in D, \quad \forall \lambda \in [0,1] : f[\lambda x + (1 - \lambda) y] \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

e. Une matrice A, carrée de taille n, à éléments réels est dite bistochastique, si ses éléments a_{ij}, $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots n$ sont tels que :

$$\begin{cases} a_{ij} \geqslant 0 \qquad i = 1, \dots, n \; ; \; j = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

f. Une matrice carrée de taille n est une matrice de permutation, si, sur chaque ligne et sur chaque colonne, elle admet un élément égal à un, tous les autres étant nuls.

Une matrice de transposition est une matrice de permutation admettant au plus deux éléments égaux à 1 en dehors de la diagonale.

I

1. Montrer que le produit de deux matrices bistochastiques est encore une matrice bistochastique.

2. Vérifier que chaque vecteur ligne d'une matrice bistochastique est de norme inférieure ou égale à 1, et que, s'il est de norme 1, il s'agit d'un des vecteurs de la base canonique.

3. Montrer qu'une matrice bistochastique inversible, d'inverse bistochastique a tous ses vecteurs lignes de norme 1.

4. En déduire la forme de ces matrices et donner l'expression de leur inverse.

.../...

II

On considère le sous ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^n$ constitué des vecteurs x, dont les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ satisfont :

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_n = 1 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \ldots \leqslant x_n \end{cases}$$

Sur $\mathcal{S}$, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par : $y \mathcal{R} x$ si et seulement si il existe une matrice bistochastique A, telle que $y = Ax$.

1. Vérifier que $\mathcal{S}$ est un ensemble convexe.

2. Montrer que, si x et y sont deux éléments de $\mathcal{S}$ tels que $y \mathcal{R} x$, on a pour toute fonction convexe f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geqslant f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n)$$

3. *a.* On considère la fonction φ_k définie par :

$$\forall\ t \in \mathbb{R} : \quad \varphi_k(t) = \begin{cases} x_k - t & \text{si } t \leqslant x_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que φ_k est une fonction convexe.

b. En déduire que si deux éléments x et y de $\mathcal{S}$ sont liés par $y \mathcal{R} x$, on a :

$$\forall\ k = 1, \ldots, n \qquad \sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_i$$

4. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Cette relation est-elle totale?

III

Inversement, on se propose de montrer que, si deux éléments x et y de $\mathcal{S}$ satisfont :

$$\forall\ k = 1, \ldots, n \qquad \sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_i$$

alors il existe une matrice bistochastique A telle que :

$$y = Ax$$

1° Vérifier que le résultat est vrai pour $n = 1$.

Adoptant un raisonnement par récurrence, on suppose le résultat valable pour les entiers strictement inférieurs à n.

2° Montrer le résultat cherché, s'il existe un entier $k < n$, tel que :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} y_i$$

3° On suppose maintenant que pour tout entier $k < n$, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i < \sum_{i=1}^{k} y_i$$

a. Vérifier que les ensembles : $C_0 = \left\{ k : x_k < \frac{1}{n} \right\}$ et $C_1 = \left\{ k : x_k > \frac{1}{n} \right\}$ sont non vides. On notera i le plus grand élément de C_0 et j le plus petit élément de C_1.

b. Soient ε un réel strictement positif et x^* un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $x_1^* \ldots x_n^*$ tels que :

$$\begin{cases} x_i^* = x_i + \varepsilon \leqslant \dfrac{1}{n} \\ x_j^* = x_j - \varepsilon \geqslant \dfrac{1}{n} \\ x_k^* = x_k \quad \text{pour} \quad k \neq i, j. \end{cases}$$

Établir l'existence d'une matrice bistochastique B, telle que : $x^* = Bx$. Expliciter cette matrice.

c. Quelle est la valeur maximale du réel ε permettant en plus d'avoir les inégalités :

$$\forall\ l \leqslant n : \quad \sum_{k=1}^{l} x_k^* \leqslant \sum_{k=1}^{l} y_k$$

. . . / . . .

1781

d. Distinguant deux cas selon que pour cette valeur maximale, il existe ou non un entier l_0 tel que :

$$\sum_{k=1}^{l_0} x_k^* = \sum_{k=1}^{l_0} y_k$$

en déduire l'existence d'une matrice bistochastique A telle que $y = Ax$.

IV

1° Montrer que si x et y sont deux éléments de $\mathcal{S}$, tels que : $y \mathcal{R} x$, alors :

$$y = \prod_{k=1}^{K} [\lambda_k I + (1 - \lambda_k) \mathcal{C}_k] x,$$

où K est un entier, λ_k, $k = 1, \ldots, K$, des réels compris entre 0 et 1, I la matrice identité de taille n, $\mathcal{C}_k$, $k = 1, \ldots, K$ des matrices de transposition.

2° Vérifier que la matrice : $\prod_{k=1}^{K} [\lambda_k I + (1 - \lambda_k) \mathcal{C}_k]$ peut aussi s'écrire sous la forme : $\sum_{q=1}^{Q} \mu_q C_q$, où Q est un entier, C_q, $q = 1, \ldots, Q$ des matrices de permutation et où les réels μ_q satisfont : $\mu_q \geqslant 0$, $q = 1, \ldots, Q$, $\sum_{q=1}^{Q} \mu_q = 1$

3° Établir que l'ensemble des matrices bistochastiques est un ensemble convexe.

En déduire que toute matrice du type :

$\sum_{q=1}^{Q} \mu_q C_q$, $\mu_q \geqslant 0$, $q = 1, \ldots, Q$, $\sum_{q=1}^{Q} \mu_q = 1$ est bistochastique.

4° Montrer que les matrices de permutation ne peuvent s'écrire : $\lambda A + (1 - \lambda) B$ où A et B sont deux matrices bistochastiques différentes et où λ est strictement compris entre 0 et 1.

V

Une application g de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ est dite S-convexe si,

$$\forall x, y \in \mathcal{S} : y \mathcal{R} x \Rightarrow g(y) \leqslant g(x)$$

Elle est dite strictement S-convexe si elle est S-convexe et si de plus : $[y \mathcal{R} x \text{ et } g(x) = g(y)] \Rightarrow [x = y]$.

1° Soit g_1 la fonction de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g_1(x) = -1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i x_i$$

a. Vérifier que :

$$g_1(x) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min \{x_i, x_j\} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|$$

b. Montrer que pour tout x de $\mathcal{S}$: $0 \leqslant g_1(x) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$. Pour quels vecteurs x les bornes sont-elles atteintes ?

c. La fonction g_1 est-elle S-convexe? strictement S-convexe?

2° Soit g_2 la fonction de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$g_2(x) = n \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n}\right)^2}$$

a. Établir que : $g_2(x) = n \sqrt{\frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2}$

b. En déduire que : $g_2(x) \geqslant \sqrt{2}\, g_1(x)$. Dans quel cas a-t-on l'égalité?

c. Montrer que g_2 est strictement S-convexe.

FIN

1-79-1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail